

Ad Soyad : CEVAP ANAHTARI
Numara :

01.11.2018

MAT 103 LİNEER CEBİR QUIZ SORULARI

SORU 1 Bir (H, T, \perp) halkasında (H, T) abel grubunun birim elemanı θ olsun. $\forall x \in H$ için
$$x \perp \theta = \theta \perp x = \theta$$
dir, ispatlayınız.

SORU 2 $\forall x, y \in Z$ için
$$\oplus : Z \times Z \rightarrow Z$$
$$(x, y) \rightarrow x \oplus y = x + y - 2$$
iç işlemi tanımlansın. (Z, \oplus) bir abel grubudur, gösteriniz.

Başarılar
Prof. Dr. İsmail AYDEMİR

1- (H, T) bir grup olduğundan $\theta T \theta = \theta$ yazılır. Buradan

$$x \perp \theta = x \perp (\theta T \theta)$$

veya \perp 'nin T ye dağılımlı olmasından da

$$x \perp \theta = (x \perp \theta) T (x \perp \theta)$$

dur. Bu ise $x \perp \theta = \theta$ olmasını gerektirir. Benzer olarak

$$\theta \perp x = (\theta T \theta) \perp x = (\theta \perp x) T (\theta \perp x)$$

yazılır. Buradan da $\theta \perp x = \theta$ dur.

2- 1) Kapalılık: Hipoteze göre \mathbb{Z} , \oplus işlemine göre bir iç işlem olduğundan \mathbb{Z} kapalıdır.

2) Birleşme: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ için

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) \text{ midir?}$$

$$\begin{aligned} (x \oplus y) \oplus z &= (x + y - 2) \oplus z = (x + y - 2) + z - 2 \\ &= x + y + z - 4 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$\downarrow (\mathbb{Z}, +) \text{ Abel grup}$

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus (y + z - 2) = x + (y + z - 2) - 2 \\ &= x + y + z - 4 \quad \dots (2) \end{aligned}$$

(1) ve (2) eşitlik görülür.

3) Birim eleman: $\forall x \in \mathbb{Z}$ için

$$x \oplus e = e \oplus x = x \text{ olacak şekilde bir } e \in \mathbb{Z}?$$

$$x \oplus e = x + e - 2 = x \Rightarrow e = 2 \in \mathbb{Z} \text{ ve}$$

$$e \oplus x = e + x - 2 = x \Rightarrow e = 2 \in \mathbb{Z} \text{ birim elemandır.}$$

4) Ters eleman: $\forall x \in \mathbb{Z}$ ve $e = 2 \in \mathbb{Z}$ birim elemanı için

$$x \oplus x^{-1} = x^{-1} \oplus x = e \text{ olacak şekilde bir } x^{-1} \in \mathbb{Z}?$$

$$x \oplus x^{-1} = x + x^{-1} - 2 = e = 2 \Rightarrow x^{-1} = \underbrace{4}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{x}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z} \text{ ve}$$

$$x^{-1} \oplus x = x^{-1} + x - 2 = e = 2 \Rightarrow x^{-1} = 4 - x \in \mathbb{Z} \text{ ters elemandır.}$$

5) Değişme: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$x \oplus y = y \oplus x \text{ midir?}$$

$$x \oplus y = x + y - 2 = y + x - 2 = y \oplus x \text{ elde edilir.}$$

$\xrightarrow{(\mathbb{Z}, +)} \text{Abel grup}$